ISSN 0798 1015

REVISTA ESPACIOS

EDUCACIÓN • EDUCAÇÃO • EDUCATION

Vol. 40 (Nº 17) Año 2019. Pág. 2

Una propuesta didáctica para introducir los tipos de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales

A didactic proposal to introduce the types of solutions of the linear equations systems

CÁRCAMO, Andrea 1; FUENTEALBA, Claudio 2

Recibido: 07/12/18 • Aprobado: 03/03/2019 • Publicado 27/05/2019

Contenido

RESUMEN:
En este estudio exploratorio, se describe una propuesta didáctica aplicada en la universidad que tiene como objetivo introducir los tipos de soluciones que se pueden obtener al resolver matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y específicamente, que los estudiantes relacionen el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada con los tipos de conjunto solución que puede tener un sistema de ecuaciones lineales. La metodología de este estudio es la investigación basada en el diseño que consta de tres fases. En la primera fase, se diseñó la propuesta didáctica basada en la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes. En la fase del experimento de enseñanza, se puso a prueba la propuesta didáctica a través de una intervención de aula con estudiantes de primer año de ingeniería. Finalmente, en la tercera fase, se analizaron los datos recopilados en la fase anterior, los cuales dan indicios del potencial de esta propuesta didáctica para apoyar la construcción de este contenido de Álgebra Lineal.
Palabras clave: trayectoria hipotética de aprendizaje; investigación basada en el diseño; Álgebra Lineal; sistemas de ecuaciones lineales

ABSTRACT:
In this exploratory study, we describe a didactic proposal applied in the university that aims to introduce the types of solutions that can be obtained by solving a system of linear equations matrix, and specifically, that students relate the range of the coefficient matrix and the range of the augmented matrix with the types of solution set that a system of linear equations can have. The methodology of this study is design-based research that consists of three phases. In the first phase, the didactic proposal based on the instructional design heuristics of the emergent models was designed. In the phase of the teaching experiment, the didactic proposal was put to the test through a classroom intervention with first-year engineering students. Finally, in the third phase, the data collected in the previous phase were analyzed, which give indications of the potential of this didactic proposal to support the construction of this content of Linear Algebra.
Keywords: hypothetical learning trajectory; design-based research; Linear Algebra; systems of linear equations

1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales son un contenido clave para Álgebra Lineal, ya que este se utiliza con otros conceptos importantes de este curso como rango, dependencia en independencia lineal, transformaciones lineales, valores y vectores propios (Oktaç, 2018). Sin embargo, varios estudios han reportado las dificultades que presentan los estudiantes con este concepto y en particular, con los tipos de conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales (Trigueros, Oktaç y Manzanero, 2007; Neira, 2012; Oktaç, 2018).

Con la finalidad de contribuir a minimizar las dificultades que los estudiantes de primer año de universidad tienen con los tipos de conjunto solución que puede tener un sistema de ecuaciones lineales, se presenta una propuesta didáctica para Álgebra Lineal que tiene como objetivo introducir los tipos de soluciones que se pueden obtener al resolver matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y en concreto, que los estudiantes relacionen el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada con los tipos de conjunto solución que puede tener un sistema de ecuaciones lineales.

2. Marco teórico

El marco de la investigación fue la heurística de diseño de los modelos emergentes que se utilizó para la elaboración de la propuesta didáctica de este estudio.

La heurística de diseño de los modelos emergentes, ha sido parte de varios estudios recientes en educación matemática a nivel universitario (por ejemplo, ver Cárcamo, Fortuny y Fuentealba, en prensa y Wawro, Rasmussen, Zandieh y Larson, 2013), ya que en otros niveles educativos ha demostrado ser una heurística de diseño potente (Gravemeijer, 1999). Para seguir contribuyendo a este tipo de estudios, se diseñó una propuesta didáctica para introducir los distintos tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales resuelto matricialmente y en particular, que los estudiantes relacionen el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada con los tipos de conjunto solución que puede tener un sistema de ecuaciones lineales.

La heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes busca crear una secuencia de tareas en que los estudiantes primero desarrollen modelos-de su actividad matemática informal que más tarde se transformen en modelos-para su razonamiento matemático más sofisticado. La progresión del modelo-de al modelo-para puede estar definida en términos de cuatro niveles de actividad que se denominan: situacional, referencial, general y formal. La actividad situacional implica interpretaciones y soluciones que dependen de la comprensión de cómo actuar en el contexto del problema. La actividad referencial comprende modelos-de que se refieren al entorno descrito en las actividades de instrucción. La actividad general incluye modelos-para facilitar un enfoque en las interpretaciones y soluciones independientes de las imágenes particulares de la situación. La actividad formal implica razonar con el simbolismo convencional y ya no depende del apoyo de los modelos-para la actividad matemática (Gravemeijer, 1999).

3. Metodología

La metodología del estudio es la investigación basada en el diseño (IBD) en la que se distinguen tres fases: (1) la preparación del experimento, (2) el experimento de enseñanza y (3) el análisis retrospectivo. En la segunda fase se efectúan las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones de ciclos de tres pasos: diseño, prueba y revisión (Cobb y Gravemeijer, 2008). En esta investigación, en la primera fase, se elaboró, lo que Simon (1995) denomina, una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) que se compone de tres elementos: la meta de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje. La propuesta didáctica que describimos en este trabajo contempla la meta de aprendizaje y las tareas de aprendizaje. En la Tabla 1, se presenta un resumen de esta propuesta didáctica. A continuación, en la fase de experimentos de enseñanza, desarrollamos un primer ciclo de intervención en el aula. En la fase de análisis retrospectivo efectuamos un análisis preliminar comparando la THA con la trayectoria actual de aprendizaje de los estudiantes que participaron en el estudio. La trayectoria actual de aprendizaje se construyó a partir de los protocolos escritos de los estudiantes de las tareas de la propuesta didáctica y de grabaciones de audio realizadas en el aula.

Tabla 1
Resumen de la propuesta didáctica para introducir los tipos de soluciones que se pueden obtener al resolver matricialmente un sistema de ecuaciones lineales

Meta de aprendizaje	Descripción de las tareas de aprendizaje
Resolver un problema extra-matemático a través de sistemas de ecuaciones lineales resueltos matricialmente.	Tarea 1. Se entrega información sobre los puntajes obtenidos en las pruebas de Álgebra Lineal de María, Juan y Pedro. Se pide determinar si se pueden ayudar a estas tres personas a saber sus puntajes de cada prueba.
Reconocer la relación que existe entre el rango de la matriz de los coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el tipo de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.	Tarea 2. Se pide conjeturar la relación que existe entre el rango de la matriz de los coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el tipo de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, a partir de la resolución de la tarea 1.
Usar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada para establecer el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales de 3x3.	Tarea 3. Se pide determinar el conjunto solución de tres sistemas de ecuaciones lineales de 3x3.
Utilizar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada para establecer el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales de *mxn* (*m* se refiere al n° de ecuaciones y *n* al n° de incógnitas) y de sistemas de ecuaciones lineales que contienen parámetros.	Tarea 4. Se pide determinar el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales con diferentes números de ecuaciones y de incógnitas. Además, se solicita discutir los tipos de soluciones que pueden tener sistemas de ecuaciones lineales con parámetros.

4. Resultados

En este apartado presentamos las tareas de la propuesta didáctica acompañada de ejemplos de respuestas que entregaron algunos estudiantes a estas.

4.1. Tarea 1

La tarea 1 de la propuesta didáctica, se presenta en la Figura 1 y se encuentra basada en la situación planteada por Engler, Vrancken, Muller, Hecklein y Cadoche (2001). Esta tarea es un problema extra-matemático. Fue desarrollada en pequeños grupos por estudiantes de primer año de ingeniería que habían iniciado su estudio en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales matricialmente. Por lo tanto, sabían representar un sistema de ecuaciones lineales matricialmente y conocían tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada asociada a un sistema de ecuaciones lineales. Por esta razón, su profesor los motiva a utilizar estos conocimientos para resolver el problema.

Figura 1
La tarea 1 de la propuesta didáctica

En grupo, de 2 a 3 estudiantes, resuelvan el siguiente problema:

María, Juan y Pedro son estudiantes de primer año de ingeniería. Cada uno de ellos, obtuvo 250 puntos en total después de rendir tres pruebas parciales en Álgebra Lineal. Con este puntaje ellos aprobaron la asignatura. La primera calificación de cada estudiante excedió a la segunda en dos puntos.

En relación con la tercera calificación, cada estudiante tiene diferente información:

- La tercera calificación de María superó a su primera calificación en 6 puntos.
- Juan sabe que el doble de su primera calificación más su tercera calificación excede en dos al puntaje total obtenido en las tres pruebas.
- La tercera calificación de Pedro corresponde a la diferencia entre el total de puntos que obtuvo en las tres pruebas parciales y el doble de su primera calificación.

A María, Juan y Pedro no les informaron cuál fue el puntaje en cada prueba parcial, por lo que ellos están tratando de averiguarlos. ¿Pueden ayudarlos?

En la Figura 2, se presenta un ejemplo de resolución de la tarea 1 de la propuesta didáctica escrita por un estudiante que era parte de un grupo de tres integrantes. En esta resolución se observa que, al puntaje de cada prueba parcial, le asigna una incógnita (x, y, z) y luego, escribe tres sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas cada uno y que corresponden a María, Juan y Pedro (de izquierda a derecha). Por consiguiente, cada sistema de ecuación lineal lo traspasa a una matriz ampliada y realiza operaciones filas a esta matriz. De esta manera, el estudiante obtiene una matriz escalonada por fila equivalente a cada matriz ampliada. A partir de este proceso, el estudiante junto a sus compañeros de grupo concluye el tipo de solución para cada sistema de ecuaciones lineales, pero no específica el conjunto solución. Además, se observa que solo justifica porque un sistema de ecuaciones lineales (el sistema asociado a Pedro) no tiene solución, ya que escribe que es "producto de una contradicción" que se infiere que corresponde la igualdad escrita "0=-2". Sin embargo, no argumenta porque concluye que el sistema de ecuaciones lineales vinculado a Juan posee "soluciones posibles infinitas".

En lo que se refiere a interpretar las soluciones matemáticas al contexto del problema de la tarea 1 (Figura 1), en la Figura 2 se ve que el estudiante escribe un comentario para María, Juan y Pedro, pero no responde a la pregunta del problema que es si puede ayudarlos a saber su puntaje de cada prueba parcial.

Figura 2

Ejemplo de resolución de la tarea 1 de la propuesta didáctica escrita por un estudiante

punt 1ª prueba = x
punt 2ª prueba = y
punt 3ª prueba = z

- $x+y+z=250$
- $x = y+2$
  $x-y=2$

Maria; $z = x+6$
$-x+z=6$

Juan: $2x+z=252$

Pedro; $z = 250-2x$
$2x+z = 250$

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y+z=250 \\ -x+z=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y+z=250 \\ 2x+z=252 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y+z=250 \\ 2x+z=250 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 250 \\ -1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2+(-1)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 256 \\ -1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+(1)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 256 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+(1)f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 256 \\ 0 & 0 & 3 & 264 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x-y=2 \\ y+2z=256 \\ 3z=264 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=82 \\ y=80 \\ z=88 \end{array}\right\} \text{solucion unica}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 250 \\ 2 & 0 & 1 & 252 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2+(-1)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 2 & 0 & 1 & 252 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+(-2)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+(-1)f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2y+z=248 \end{cases} \quad \left.?\right\} \text{soluciones posibles infinitas}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 250 \\ 2 & 0 & 1 & 250 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2+(-1)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 2 & 0 & 1 & 250 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+(-2)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 0 & 2 & 1 & 246 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+(-1)f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

- Las notas de Maria corresponden a 82, 80 y 88
- Las notas de Juan son inciertas y se manejan en un rango infinito de posibilidades.
- No se puede saber en absoluto las notas de Pedro ya que matematicamente no existen soluciones ni siquiera probables.

En general, las respuestas escritas de los estudiantes que participaron de este estudio, muestran que ellos establecieron el sistema de ecuaciones lineales asociado a María e interpretaron su solución correctamente. Sin embargo, algunos estudiantes presentaron dificultades para establecer e interpretar la solución del sistema de ecuaciones lineales vinculado a Juan o a Pedro.

4.2. Tarea 2

Después de que los estudiantes resolvieron esta tarea y concluyeron, el profesor les solicitó, que teniendo presente lo que habían realizado en la tarea 1, ellos conjeturaran la relación que existe entre el rango de la matriz de los coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. En la Tabla 2 se muestra un ejemplo de respuesta escrita a la tarea 2 que relaciona el conjunto solución obtenido para cada sistema de ecuaciones lineales asociado a María, Juan y Pedro con los rangos de la matriz de coeficientes y ampliada. En este ejemplo (Tabla 2), se observa que los estudiantes que elaboraron esa respuesta, no mencionan explícitamente a la matriz de coeficientes y esto, hace que sea difícil comprender la relación que hacen entre los rangos de las matrices (de coeficientes y ampliada) y los tipos de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Tabla 2
Ejemplo de respuesta a la Tarea 2 de la propuesta didáctica

Conjetura con respecto a la solución obtenida para el sistema de ecuaciones lineales asociado a María
Podemos ver que R(A)=3 y el nº de incognitas es igual al rango de las matrices ∴ decimos que tiene solución única
Conjetura con respecto a la solución obtenida para el sistema de ecuaciones lineales asociado a Juan
R,, podemos ver que el rango es menor al nº de incognitas y a las incognitas puedo asignarle cualquier valor ∴ tiene infinitas soluciones
Conjetura con respecto a la solución obtenida para el sistema de ecuaciones lineales asociado a Pedro
el rango de la matriz es ≠ al rango de la ampliada. el rango de la ampliada es mayor ∴ no tiene solución

Después de que los estudiantes escribieron sus conjeturas para responder a la tarea 2, cada grupo las compartió y el profesor, considerando dichas respuestas, institucionalizó la conexión que existe entre el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada con los tipos de conjunto solución que puede tener un sistema de ecuaciones lineales.

4.3. Tarea 3

En la Figura 3, se muestra la Tarea 3 que los estudiantes trabajaron individualmente en el aula guiados por el profesor.

Figura 3
La tarea 3 de la propuesta didáctica

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

1. $$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+4z=-1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 4x-2y+8z=8 \end{cases}$$

En la Figura 4, se presenta un ejemplo de resolución y respuesta, de un estudiante, a uno de los sistemas de ecuaciones lineales propuestos para encontrar su conjunto solución en la Tarea 3. En particular el número 3. En esta resolución, se observa que el estudiante trabaja con la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones lineales. Luego, utiliza el análisis de rangos de estas matrices junto con el número de incógnitas del sistema de ecuaciones lineales para concluir el tipo de solución de dicho sistema. Finalmente, anota correctamente el conjunto solución de este.

Figura 4
Ejemplo de resolución y respuesta, de un estudiante, al sistema de ecuaciones lineales 3 propuesta en la Tarea 3 de la propuesta didáctica

3.- $$\begin{aligned} x+y-2z&=9 \\ 2x-y+4z&=4 \\ 4x-2y+8&=8 \end{aligned}$$

3.- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 8 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3+(-2)_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2+(-2)_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $R(A) = R(A \mid B) = 2 < n°$ incógnitas $= 3$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones
El conjunto solución del sistema es:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x+y-2z=9 \wedge -3y+8z=-14 \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x = \frac{13-2t}{3}, y = \frac{8t+14}{3}, z=t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

4.4. Tarea 4

En la Tabla 3 se muestra un ejemplo de ejercicio planteado a los estudiantes en la Tarea 4 en conjunto con la respuesta escrita de un estudiante. En esta última, se observa que el estudiante aplica correctamente la relación entre el rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas del sistema de ecuaciones lineales que está resolviendo para determinar que el conjunto solución corresponde a una única solución.

Tabla 3
Ejemplo de ejercicio planteado en la Tarea 4 de la propuesta didáctica en conjunto con un ejemplo de respuesta escrita por un estudiante

Determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 5t & = & 3 \\ & & z & + & 3t & = & 3 \\ & & -2t & + & u & = & 4 \end{array}\right| \text{, con incógnitas } x, y, z, t, u.$$

La matriz asociada será

$$[N:I] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \quad \text{. Triangularizamos } [N:I]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_{3+(-1)1}]{F_{4+(-1)1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_{2+(-2)1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_{23}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[F_{4+(2)1}]{F_{3+(3)2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_{4+(-1)3}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz ya se encuentra triangularizada, por lo que se puede analizar el rango

$Rg(N) = 3$

$Rg(N:I) = 3$

N° incognitas $= 3$

Al ser $Rg(N) = Rg(N:I) = N^{\circ}$ incognitas

la matriz posee una única solución para sus incognitas.

Definidas por el sig conjunto

$$S = \{x, y, z \in \mathbb{R} \,/\, (3z = -3) \wedge (y + z = 1) \wedge (x + y + z = 2)\}$$

$$S = \{x, y, z \in \mathbb{R} \,/\, (z = -1) \wedge (y = 2) \wedge (x = 1)\}$$

---

5. Conclusiones

La propuesta didáctica descrita tuvo como objetivo introducir los tipos de soluciones que se pueden obtener al resolver matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y específicamente, que los estudiantes relacionaran el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada con los tipos de conjunto solución que puede tener un sistema de ecuaciones lineales. Se considera que hay evidencias que la propuesta didáctica cumplió con sus objetivos en varios de los estudiantes que participaron del estudio. Sin embargo, se observa que se presentan dificultades para los estudiantes en las tareas 1 y 2. En particular, en el caso de la tarea 1, algunos estudiantes dan evidencia de tener problema para interpretar los conjuntos soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales asociados a Juan y Pedro. Por otra parte, en la tarea 2, algunos estudiantes, como los del ejemplo que se muestra en la Figura 2, no logran comunicar de forma escrita la relación que hacen entre los rangos de las matrices (de coeficientes y ampliada) y los tipos de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Este estudio exploratorio, nos permitió detectar las principales fortalezas y debilidades de nuestra propuesta didáctica. Esto servirá para modificarla con la finalidad de que sea aplicada nuevamente en el aula siempre con el propósito de favorecer que el estudiante construya un nuevo conocimiento en Álgebra Lineal.

Referencias bibliográficas

Cárcamo, A., Fortuny J., & Fuentealba C. (2018). The emergent models in linear algebra: an example with spanning set and span. *Teaching Mathematics and its Applications*, *37*(4), 202-217-

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (Eds.). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Engler, A., Vrancken, S., Muller, D., Hecklein, M., y Cadoche, L. (2001). Propuesta didáctica para estudiar sistemasde ecuaciones lineales. Sondeo de opiniones. *Educación Matemática 13*(2), 27-129.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155–177.

Neira, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas* (Tesis de magister). Pontificia universidad católica del Perú, Lima, Perú.

Oktaç A. (2018). Conceptions About System of Linear Equations and Solution. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, M. Zandieh (eds), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. *ICME-13 Monographs* (pp. 71-101). Cham: Springer.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in algebra. *Proceedings of 5th Congress of ERME*. Larnaca, Cyprus, pp. 2359-2368.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., & Larson, C. (2013). Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra. *Educational design research—Part B: Illustrative cases*, 905-925

---

1. Doctora en Educación en el Ámbito de Didáctica de la Matemática y las Ciencias. Académica de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería. Univervesidad Austral de Chile. andrea.carcamo@uach.cl

2. Doctor en Educación en el Ámbito de Didáctica de la Matemática y las Ciencias. Académico de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería. Universidad Austral de Chile. cfuentealba@uach.cl

---